**Тема: Производная**

**Урок: Определение производной, её физический и геометрический смысл. Алгоритм нахождения производной**

[1. Введение новых понятий](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)



Рис. 1. График функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51183/711f6720_fab0_0130_c248_12313d0128c8.png.

Рассмотрим функцию https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51185/71a536b0_fab0_0130_c24a_12313d0128c8.png, ее график и дадим физическую интерпретацию.

Построим систему координат и кривую https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51186/72380780_fab0_0130_c24b_12313d0128c8.png (см. рис.1), где

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51188/72ffcbc0_fab0_0130_c24c_12313d0128c8.png независимая переменная или аргумент (время),

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51189/73fae080_fab0_0130_c24e_12313d0128c8.png – зависимая переменная или функция (расстояние),

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51190/748f0850_fab0_0130_c24f_12313d0128c8.png – закон или правило, по которому каждому значению https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51192/7514eb20_fab0_0130_c251_12313d0128c8.png ставится в соответствие только одно значение https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51189/73fae080_fab0_0130_c24e_12313d0128c8.png.

Зафиксируем момент времени https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png (см. рис.2). В этот момент времени можно вычислить по заданному закону https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51194/76452370_fab0_0130_c253_12313d0128c8.png , т.е. имеем точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51196/76ccbf60_fab0_0130_c255_12313d0128c8.png. Эта точка показывает, что в данный момент времени https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png, расстояние - https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51194/76452370_fab0_0130_c253_12313d0128c8.png . Дадим аргументу приращение https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png, т.е. прошло некоторое время https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png. Момент времени, который будет рассматриваться  - это  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51199/77f1c060_fab0_0130_c258_12313d0128c8.png.

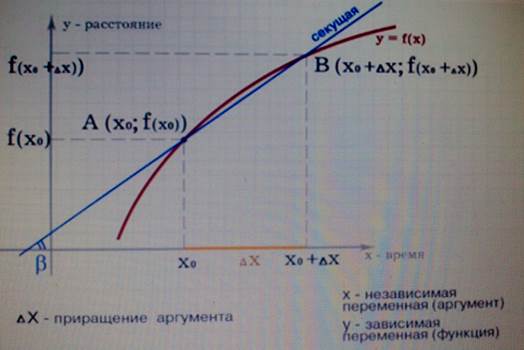


Рис. 2. Секущая к графику функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51186/72380780_fab0_0130_c24b_12313d0128c8.png.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png*–*приращение аргумента – это разность между новым значением аргумента и старым.

Итак, в новый момент времени, расстояние (от дома) - https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51201/791f1ef0_fab0_0130_c25a_12313d0128c8.png. Это расстояние можно вычислить по заданному закону, т.е. если подставить в функцию новое значение независимой переменной (аргумента), то можно вычислить новое значение функции. Так получилась точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51203/79b5cbb0_fab0_0130_c25c_12313d0128c8.png. В результате получилась секущая https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51204/7a4cfe80_fab0_0130_c25d_12313d0128c8.png, которая наклонена к оси https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51192/7514eb20_fab0_0130_c251_12313d0128c8.png  под углом https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51206/7adc5e30_fab0_0130_c25f_12313d0128c8.png.

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51204/7a4cfe80_fab0_0130_c25d_12313d0128c8.png – секущая, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51206/7adc5e30_fab0_0130_c25f_12313d0128c8.png – ее угол наклона. Этот угол, во – первых, в верхней полуплоскости и, во – вторых, с положительным направлением оси https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51192/7514eb20_fab0_0130_c251_12313d0128c8.png.

Рассмотрим треугольник https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51207/7b86e5c0_fab0_0130_c260_12313d0128c8.png (см. рис.3). Он прямоугольный. В этом треугольнике острый угол – это угол https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51206/7adc5e30_fab0_0130_c25f_12313d0128c8.png-  угол  наклона секущей. Один из катетов - это приращение аргумента, а второй катет – это разность между значением функции в новой точке и значением функции в старой точке.

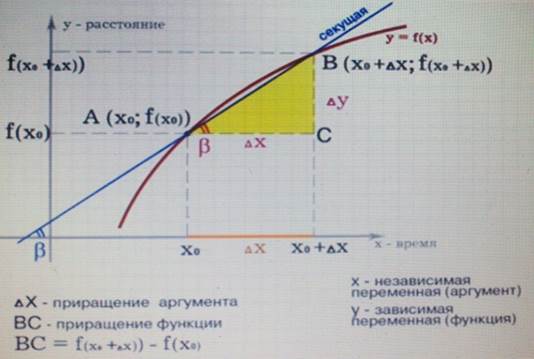


Рис. 3. Приращение функции и приращение аргумента.

Величина https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51210/7d1f6c50_fab0_0130_c263_12313d0128c8.png называется https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51212/7dc60680_fab0_0130_c265_12313d0128c8.png – приращение функции и вычисляется как разность значений функции в новый момент времени минус значение функции в старый момент времени

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51213/7e5c4d50_fab0_0130_c266_12313d0128c8.png*.*

[2. Физический смысл отношения ∆f/∆x](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)

Рассмотрим отношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png, где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51216/7f714a90_fab0_0130_c269_12313d0128c8.png – приращение функции, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png – приращение аргумента (см. рис.4).

Из физических соображений ясно, что отношение расстояния ко времени – это средняя скорость https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51217/80542c90_fab0_0130_c26a_12313d0128c8.png. В этом заключается физический смысл отношения  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png.

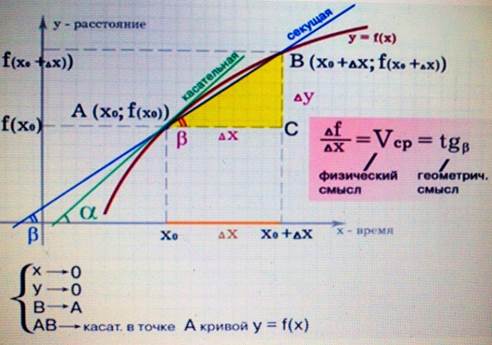
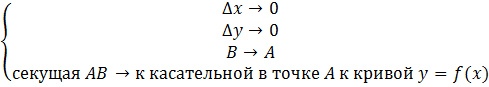


Рис. 4. Физический и геометрический смысл отношения   https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51220/817b33c0_fab0_0130_c26d_12313d0128c8.png.

С другой стороны отношение катета https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51210/7d1f6c50_fab0_0130_c263_12313d0128c8.png к катету https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51221/82188110_fab0_0130_c26e_12313d0128c8.png – это тангенс угла https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51206/7adc5e30_fab0_0130_c25f_12313d0128c8.png – тангенс угла наклона секущей, т.е. геометрический смысл отношения  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png – это тангенс угла наклона секущей  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51223/82a6d0b0_fab0_0130_c270_12313d0128c8.png.

[3. Определение производной](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)

Пусть https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png. Понятно, что и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51226/84284c40_fab0_0130_c273_12313d0128c8.png. Точка https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51227/84b93360_fab0_0130_c274_12313d0128c8.png будет стремиться к точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51229/85518de0_fab0_0130_c276_12313d0128c8.png, а положение секущей https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51204/7a4cfe80_fab0_0130_c25d_12313d0128c8.png будет стремиться занять положение касательной в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51229/85518de0_fab0_0130_c276_12313d0128c8.png к кривой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51231/87d7c260_fab0_0130_c278_12313d0128c8.png  (см. рис.4). Имеем



Зафиксируем эту касательную, https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51234/8927f390_fab0_0130_c27b_12313d0128c8.png – угол наклона этой касательной. Если зафиксировать точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png, то отношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png зависит только от величины https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png.

Если отношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51235/89d3ab00_fab0_0130_c27c_12313d0128c8.png  при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png стремится к какому-то числу, то это число называется производной функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51236/8a7e0b80_fab0_0130_c27d_12313d0128c8.png в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png и обозначается https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51238/8b0d62b0_fab0_0130_c27f_12313d0128c8.png.

Определение. Производной функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51236/8a7e0b80_fab0_0130_c27d_12313d0128c8.png в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png называется число, к которому стремится разностное соотношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51235/89d3ab00_fab0_0130_c27c_12313d0128c8.png  при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png.

Определение производной с помощью пределов.

Предел при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png разностного отношения  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png, если он существует, называется производной функции в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png и обозначается https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51238/8b0d62b0_fab0_0130_c27f_12313d0128c8.png.

[4. Геометрический и физический смысл производной](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)

https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51239/8b9e87c0_fab0_0130_c280_12313d0128c8.png*,* где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51241/8c29a5c0_fab0_0130_c282_12313d0128c8.png – мгновенная скорость в момент https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png. В этом заключается физический смысл производной. Производная – это также тангенс угла наклона касательной https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51242/8cc7c730_fab0_0130_c283_12313d0128c8.png, где https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51234/8927f390_fab0_0130_c27b_12313d0128c8.png - угол наклона касательной к кривой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51185/71a536b0_fab0_0130_c24a_12313d0128c8.png в точке с абсциссой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png.

[5. Алгоритм нахождения производной](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)

Для того чтобы найти https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51243/8d5bbbf0_fab0_0130_c284_12313d0128c8.png нужно:

1) Задать приращение https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png – это приращение аргумента и вычислить соответствующее приращение функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51212/7dc60680_fab0_0130_c265_12313d0128c8.png или https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51245/8df4f7b0_fab0_0130_c286_12313d0128c8.png.

2) Найти разностное соотношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png, упростить его и сократить на  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png.

3) Если отношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png стремится к какому-то числу, то это число будет https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51243/8d5bbbf0_fab0_0130_c284_12313d0128c8.png.

[6. Итог урока](https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/proizvodnaya/opredelenie-proizvodnoy-eyo-fizicheskiy-i-geometricheskiy-smysl-algoritm-nahozhdeniya-proizvodnoy#mediaplayer)

Итак, на уроке было рассмотрено понятие производной. Для этого ввели два новых понятия: приращение аргумента и приращение функции. Также были рассмотрены события, когда приращение аргумента и приращение функции конкретные числа, тогда соотношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png имеет смысл физический – это средняя скорость за время https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png и геометрический смысл – это тангенс угла наклона секущей. Далее было рассмотрено, какие процессы происходят, когда https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png. Если https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png, тогда и https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51226/84284c40_fab0_0130_c273_12313d0128c8.png , и секущая стремится занять положение касательной. Если разностное отношение  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51214/7ee64240_fab0_0130_c267_12313d0128c8.png  при https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51224/8335ba80_fab0_0130_c271_12313d0128c8.png стремится к некоторому числу, то это число называется производной функции https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51236/8a7e0b80_fab0_0130_c27d_12313d0128c8.png в точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png. Физический смысл производной в момент https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png – это мгновенная скорость в момент https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png, а геометрический  – это тангенс угла наклона касательной, которая проведена к кривой в точке с абсциссой https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png. Рассмотрен алгоритм нахождения производной: нужно дать приращение аргументу и получить новую точку https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51199/77f1c060_fab0_0130_c258_12313d0128c8.png. Получили значение функции в новой точке и нашли приращение функции. Надо разделить  https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51216/7f714a90_fab0_0130_c269_12313d0128c8.png на https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png и упростить это отношение так, чтобы сократился https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51197/775adcc0_fab0_0130_c256_12313d0128c8.png, и то, что получится при стремлении https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51246/8e7b6c70_fab0_0130_c287_12313d0128c8.pngк нулю будет называться производной функции в конкретной точке https://static-interneturok.cdnvideo.ru/content/konspekt_image/51193/75aec0e0_fab0_0130_c252_12313d0128c8.png. Дальнейшее изложение зависит от вида функции, что и будет рассматриваться на следующем уроке.