**Скалярное произведение векторов**

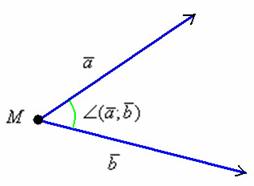
Продолжаем разбираться с векторами.

Сложение векторов, умножение вектора на число…. Было бы наивным думать, что математики не придумали что-нибудь ещё. Помимо уже рассмотренных действий, существует ряд других операций с векторами, а именно: **скалярное произведение векторов**, [**векторное произведение векторов**](http://www.mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html) и [**смешанное произведение векторов**](http://www.mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html). Скалярное произведение векторов знакомо нам со школы, два других произведения традиционно относятся к курсу высшей математики. Темы несложные, алгоритм решения многих задач трафаретен и понятен. Единственное. Информации прилично, поэтому нежелательно пытаться освоить-прорешать ВСЁ И СРАЗУ. Особенно это касается чайников, поверьте, автор совершенно не хочет чувствовать себя Чикатило от математики. Ну и не от математики, конечно, тоже =) Более подготовленные студенты могут использовать материалы выборочно, в известном смысле, «добирать» недостающие знания, для вас я буду безобидным графом Дракулой =)

Приоткроем же, наконец, дверь и увлечённо посмотрим, что происходит, когда два вектора встречают друг друга….

**Определение скалярного произведения векторов.  
Свойства скалярного произведения. Типовые задачи**

**Понятие скалярного произведения**

Сначала про**угол между векторами**. Думаю, всем интуитивно понятно, что такое угол между векторами, но на всякий случай чуть подробнее. Рассмотрим свободные ненулевые векторы http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004.gif.  Если отложить данные векторы от произвольной точки http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image006.gif, то получится картинка, которую многие уже представили мысленно:  


Признаюсь, здесь я обрисовал ситуацию только на уровне понимания. Если необходимо строгое определение угла между векторами, пожалуйста, обратитесь к учебнику, для практических же задач оно нам, в принципе, ни к чему. Также ЗДЕСЬ И ДАЛЕЕ я буду местами игнорировать нулевые векторы ввиду их малой практической значимости. Оговорку сделал специально для продвинутых посетителей сайта, которые могут меня упрекнуть в теоретической неполноте некоторых последующих утверждений.

Угол между векторами http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image010.gif может принимать значения от 0 до 180 градусов (от 0 до http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image012.gif радиан) включительно. Аналитически данный факт записывается в виде двойного неравенства: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image014.gif либо http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image016.gif (в радианах).

В литературе значок угла http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image018.gif часто пропускают и пишут просто http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image020.gif.

**Определение:** Скалярным произведением двух векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0000.gif называется ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:  
Формула скалярного произведения

Вот это вот уже вполне строгое определение.

Акцентируем внимание на существенной информации:

**Обозначение:** скалярное произведение обозначается через http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image025.gif или просто http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image027.gif.

**Результат операции является ЧИСЛОМ**: Умножается вектор на вектор, а получается число. Действительно, если длины векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image029.gif – это числа, косинус угла – число, то их произведение http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image031.gif тоже будет числом.

Сразу пара разминочных примеров:

Пример 1

Найти скалярное произведение векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0001.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image034.gif

**Решение:** Используем формулу http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image036.gif. В данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image038.gif

**Ответ:**http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image040.gif

Значения косинуса можно найти в [**тригонометрической таблице**](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf). Рекомендую её распечатать – потребуется практически во всех разделах вышки и потребуется много раз.

Чисто с математической точки зрения скалярное произведение безразмерно, то есть результат, в данном случае http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image042.gif, просто число и всё. С точки же зрения задач физики скалярное произведение всегда имеет определенный физический смысл, то есть после результата нужно указать ту или иную физическую единицу. Канонический пример по вычислению работы силы  можно найти в любом учебнике (формула в точности представляет собой скалярное произведение). Работа силы измеряется в Джоулях, поэтому, и ответ запишется вполне конкретно, например, http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image044.gif.

Пример 2

Найти http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046.gif, если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image048.gif, а угол между векторами равен http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image050.gif.

Это пример для самостоятельного решения, ответ в конце урока.

**Угол между векторами и значение скалярного произведения**

В Примере 1 скалярное произведение получилось положительным, а в Примере 2 – отрицательным. Выясним, от чего зависит знак скалярного произведения. Смотрим на нашу формулу: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image052.gif. Длины ненулевых векторов всегда положительны: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image054.gif, поэтому знак может зависеть только от значения косинуса.

***Примечание:****Для более качественного понимания нижеприведенной информации лучше изучить график косинуса в методичке*[***Графики и свойства функции***](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)*. Посмотрите, как ведёт себя косинус на отрезке http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image056.gif.*

Как уже отмечалось, угол между векторами может изменяться в пределах http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image058.gif, и при этом возможны следующие случаи:

1) Если **угол** между векторами **острый**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image060.gif  (от 0 до 90 градусов), то http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image062.gif, и **скалярное произведение будет положительным**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image064.gif. Особый случай: если векторы *сонаправлены*, то угол между ними считается нулевым http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image066.gif, и скалярное произведение также будет положительным. Поскольку http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image068.gif, то формула упрощается: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image070.gif.

2) Если **угол** между векторами **тупой**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image072.gif  (от 90 до 180 градусов), то http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image074.gif, и, соответственно, **скалярное произведение отрицательно**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image076.gif. Особый случай: если векторы *направлены противоположно*, то угол между ними считается *развёрнутым*: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image078.gif (180 градусов). Скалярное произведение тоже отрицательно, так как http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image080.gif

Справедливы и обратные утверждения:

1) Если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image064_0000.gif, то угол между данными векторами острый. Как вариант, векторы сонаправлены.

2) Если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image076_0000.gif, то угол между данными векторами тупой. Как вариант, векторы направлены противоположно.

Но особый интерес представляет третий случай:

3) Если **угол** между векторами **прямой**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image082.gif (90 градусов), то http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image084.gif и **скалярное произведение равно нулю**: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image086.gif. Обратное тоже верно: если http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image086_0000.gif, то http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image082_0000.gif. Компактно утверждение формулируется так: **Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда данные векторы ортогональны**. Короткая математическая запись: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image090.gif

***! Примечание****: повторим*[***основы математической логики***](http://www.mathprofi.ru/osnovy_matematicheskoj_logiki.html)*: двусторонний значок логического следствия http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092.gif обычно читают «тогда и только тогда», «в том и только в том случае». Как видите, стрелки направлены в обе стороны – «из этого следует это, и обратно –  из того, следует это». В чём, кстати, отличие от одностороннего значка следования http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image094.gif? Значок http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image094_0000.gif утверждает,****только то****, что «из этого следует это», и не факт, что обратное справедливо. Например: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image096.gif, но не каждый зверь является пантерой, поэтому в данном случае нельзя использовать значок http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092_0000.gif. В то же время, вместо значка http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image092_0001.gif****можно****использовать односторонний значок. Например, решая задачу, мы выяснили, что http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image098.gif и сделали вывод, что векторы ортогональны: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image100.gif – такая запись будет корректной, и даже более уместной, чем http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image090_0000.gif.*

**Третий случай имеет большую практическую значимость**, поскольку позволяет проверить, ортогональны векторы или нет. Данную задачу мы решим во втором разделе урока.

**Скалярный квадрат вектора  
Свойства скалярного произведения**

Вернёмся к ситуации, когда два вектора *сонаправлены*. В этом случае угол между ними равен нулю, http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image068_0000.gif, и формула скалярного произведения принимает вид: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image102.gif.

А что будет, если вектор http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104.gif умножить на самого себя? Понятно, что вектор сонаправлен сам с собой, поэтому пользуемся вышеуказанной упрощенной формулой:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image106.gif

Или: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image108.gif

Число http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image110.gif называется **скалярным квадратом** вектора http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0000.gif, и обозначатся как http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image113.gif.

Таким образом,**скалярный квадрат вектора http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image104_0001.gif равен квадрату длины данного вектора:**  
Скалярный квадрат вектора

Из данного равенства можно получить формулу для вычисления длины вектора:  
http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image117.gif

Пока она кажется малопонятной, но задачи урока всё расставят на свои места. Для решения задач нам также потребуются **свойства скалярного произведения**.

Для произвольных векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image119.gif и любого числа http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image121.gif справедливы следующие свойства:

1) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image123.gif – переместительный или **коммутативный** закон скалярного произведения.

2) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image125.gif – распределительный или **дистрибутивный** закон скалярного произведения. Попросту, можно раскрывать скобки.

3) http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image127.gif – сочетательный или **ассоциативный** закон скалярного произведения. Константу можно вынести из скалярного произведения.

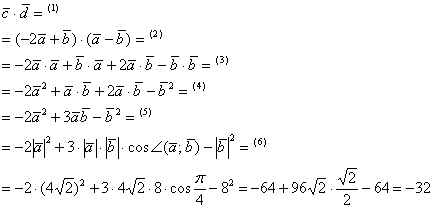
Зачастую, всевозможные свойства (которые ещё и доказывать надо!) воспринимаются студентами как ненужный хлам, который лишь необходимо вызубрить и сразу после экзамена благополучно забыть. Казалось бы, чего тут важного, все и так с первого класса знают, что от перестановки множителей произведение не меняется: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image123_0000.gif. Должен предостеречь, в высшей математике с подобным подходом легко наломать дров. Так, например, переместительное свойство не является справедливым для [**алгебраических матриц**](http://www.mathprofi.ru/deistviya_s_matricami.html). Неверно оно и для [**векторного произведения векторов**](http://www.mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html). Поэтому, в любые свойства, которые вам встретятся в курсе высшей математики, как минимум, лучше вникать, чтобы понять, что можно делать, а чего нельзя.

Пример 3

Найти скалярное произведение векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image129.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image131.gif, если известно, что http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image133.gif.

**Решение:**Сначала проясним ситуацию с вектором http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image129_0000.gif. Что это вообще такое? Сумма векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image136.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image004_0002.gif представляет собой вполне определенный вектор, который и обозначен через http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image139.gif. Геометрическую интерпретацию действий с векторами можно найти в статье [**Векторы для чайников**](http://www.mathprofi.ru/vektory_dlya_chainikov.html). Та же петрушка с вектором http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image141.gif – это сумма векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image002_0002.gif и http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image144.gif.

Итак, по условию требуется найти скалярное произведение http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image046_0000.gif. По идее, нужно применить рабочую формулу http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image147.gif, но беда в том, что нам неизвестны длины векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image149.gif и угол между ними. Зато в условии даны аналогичные параметры для векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image151.gif, поэтому мы пойдём другим путём:



(1) Подставляем выражения векторов http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image149_0000.gif.

(2) Раскрываем скобки по правилу умножения многочленов, пошлую скороговорку можно найти в статье [**Комплексные числа**](http://www.mathprofi.ru/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov.html) или [**Интегрирование дробно-рациональной функции**](http://www.mathprofi.ru/integraly_ot_drobno_racionalnoj_funkcii.html). Повторяться уж не буду =)  Кстати, раскрыть скобки нам позволяет дистрибутивное свойство скалярного произведения. Имеем право.

(3) В первом и последнем слагаемом компактно записываем скалярные квадраты векторов: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image155.gif. Во втором слагаемом используем перестановочность скалярного произведения: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image157.gif.

(4) Приводим подобные слагаемые: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image159.gif.

(5) В первом слагаемом используем формулу скалярного квадрата http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image115_0000.gif, о которой не так давно упоминалось. В последнем слагаемом, соответственно, работает та же штука: http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image161.gif. Второе слагаемое раскладываем по стандартной формуле http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image023_0000.gif.

(6) Подставляем данные условия http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image164.gif, и ВНИМАТЕЛЬНО проводим окончательные вычисления.

**Ответ:** http://www.mathprofi.ru/d/skaljarnoe_proizvedenie_vektorov_clip_image166.gif